



第2章 不等式

第1节 不等关系与不等式



题型上分练

1. ABC 【解析】由 $a > |b| > 0$, 可知 $a > b, a > -b, a^2 > b^2$, 故 **A, B, C**

正确; 当 $a = 2, b = 1$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 **D** 错误. 故选 **ABC**.

2. C 【解析】若 $xy > 0$ 且 $x + y > 0$, 则 $x > 0$ 且 $y > 0$, 充分性成立; 若 $x > 0$ 且 $y > 0$, 则 $xy > 0$ 且 $x + y > 0$, 必要性成立. 所以“ $xy > 0$ 且 $x + y > 0$ ”是“ $x > 0$ 且 $y > 0$ ”的充要条件. 故选 **C**.

3. A 【解析】对于 **A**, 由不等式的性质 3 可知不等式两边同时加上一个数, 不等号方向不变(提示: 不等式的可加性), 又 $a > b$, 所以 $a + c > b + c$, 故 **A** 错误.

对于 **B**, 因为函数 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $a^3 > b^3$, 所以 $a > b$, 故 **B** 正确.

对于 **C**, 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $c \neq 0$, 于是 $c^2 > 0$, 不等式两边同时除以 c^2 , 不等号方向不变, 所以 $a > b$, 故 **C** 正确.

对于 **D**, 已知 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 所以 $a \geq 0, b \geq 0$, 因为函数 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a < b$, 故 **D** 正确.

4. C 【解析】**A**: (举反例) 取 $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$, 则 $a - c = -2, b - d = -2$, 显然 $-2 < -2$ 不成立, 故 **A** 错误;

B: (举反例) 取 $a = -2, b = -1, c = -3, d = -2$, 则 $ac = 6, bd = 2$, 显然 $6 < 2$ 不成立, 故 **B** 错误;

C: 由于指数函数 $y = 2^x$ 是增函数, 而 $a < b, c < d$, 则 $2^a < 2^b, 2^c < 2^d$, 因此 $2^a + 2^c < 2^b + 2^d$ 恒成立, 故 **C** 正确;

D: (举反例) 取 $a = -3, b = 2, c = -4, d = 1$, 则 $a^2 + c^2 = 25, b^2 + d^2 = 5$, 显然 $25 < 5$ 不成立, 故 **D** 错误. 故选 **C**.

5. AC 【解析】对于 **A**, 因为 $a > b > c > 0$, 所以 $a^2 > ac > bc$, **A** 正确;

对于 **B**, 取 $a = 4, b = 2, c = 1$, 满足 $a > b > c > 0$, 而 $b^2 = 4 = ac$, **B** 错误;

对于 **C**, $a + c > b + c > 0$, 因此 $\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+c}$, **C** 正确;

对于 **D**, 取 $a > b > 1, c = 1$, 满足 $a > b > c > 0$, 而 $a(c^2 - 1) = 0 = b(c^2 - 1)$, **D** 错误. 故选 **AC**.

6. AC 【解析】 $\because a > b > c, \therefore a - c > b - c > 0, \therefore \frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$ (提示: 倒数法则), 故 **A** 正确;

当 $0 > a > b > c$ 时, $ab < ac$ (提示: 可乘性), 故 **B** 错误;

$\because a > b, \therefore a^3 > b^3$ (提示: $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增), 故 **C** 正确;

取 $a = -1, b = -2, c = -2.5$, 则 $a + b = -1 - 2 = -3 < -2.5 = c$, 故 **D** 错误. 故选 **AC**.

7. D 【解析】对于 **A**, 若 $a = 1, b = -2$, 则 $a^2 = 1 < b^2 = 4$ (提示: 特殊值法是常用方法), 故 **A** 错误; 对于 **B**, 若 $a = 1, b = -2$, 则

$|a| = 1 < |b| = 2$, 故 **B** 错误; 对于 **C**, 若 $a = 3, b = 2, c = 1$, 则 $\frac{a}{b} =$



$\frac{3}{2} > \frac{a+c}{b+c} = \frac{4}{3}$, 故 **C** 错误; 对于 D, 因为 $a > b > c > 0$, 所以 $a - c > a - b > 0$, 所以 $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a-c} > 0$, 所以 $\frac{b}{a-b} > \frac{b}{a-c} > \frac{c}{a-c}$, 故 **D** 正确. 故选 D.

8. AC 【解析】由 $\log_{\frac{1}{2}}(a-1) > \log_{\frac{1}{2}}(b-1)$, 得 $0 < a-1 < b-1$, 则 $1 < a < b$.

对于 A, $3^a < 3^b$, **A** 正确;

对于 B, 令 $a=2, b=3$, 则 $(a-b)(a+b-2) < 0$, **B** 错误;

对于 C, $2b-1 > 2a-1 > 1$, 则 $\frac{1}{2a-1} > \frac{1}{2b-1}$, **C** 正确;

对于 D, 若 $a=1.5, b=2$, 则 $\sqrt[3]{(a-2)^2} > 0 = \sqrt[3]{(b-2)^2}$, **D** 错误. 故选 AC.

9. ABD 【解析】对于 A, 因为 $a > b, c > d$, 所以由不等式同向可加性可得 $a+c > b+d$, 故 **A** 正确;

对于 B, 因为 $(a-b)^2 \geq 0$, 所以 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab = 6$, 故 **B** 正确;

对于 C, 当 $a > b, c=0$ 时, $ac^2 = bc^2 = 0$, 故 **C** 错误;

对于 D, $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b+d}{a+d} = \frac{(b+c)(a+d) - (b+d)(a+c)}{(a+c)(a+d)} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a+c)(a+d)}$

(提示: 作差法), 因为 $a > b > 0, c > d > 0$, 所以 $a-b > 0, c-d > 0, a+c > 0, a+d > 0$, 从而 $\frac{(a-b)(c-d)}{(a+c)(a+d)} > 0 \Rightarrow \frac{b+c}{a+c} > \frac{b+d}{a+d}$, 故 **D** 正确. 故选 ABD.

10. D 【解析】由 $3 \leq a \leq 5, -2 \leq b \leq 1$, 可得 $6 \leq 2a \leq 10, -1 \leq -b \leq 2$, 故 $5 \leq 2a-b \leq 12$, 故选 D.

11. A 【解析】由 $3 \leq xy^2 \leq 8$, 得 $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{xy^2} \leq \frac{1}{3}$. 由 $4 \leq \frac{x^2}{y} \leq 9$, 得 $16 \leq \frac{x^4}{y^2} \leq 81$. 所以 $\frac{1}{8} \times 16 \leq \frac{1}{xy^2} \times \frac{x^4}{y^2} \leq \frac{1}{3} \times 81$, 即 $2 \leq \frac{x^3}{y^4} \leq 27$, 所以 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值为 27. 故选 A.

12. BD 【解析】对于 A, 由 $3 < a < 10$ 得 $\frac{1}{10} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$, 而 $5 < b < 30$,

则 $\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 10$, 故 **A** 错误;

对于 B, 由 $3 < a < 10$ 得 $6 < 2a < 20$, 而 $5 < b < 30$, 则 $11 < 2a+b < 50$, 故 **B** 正确;

对于 C, 由 $3 < a < 10$ 得 $-10 < -a < -3$, 而 $5 < b < 30$, 则 $-5 < b-a < 27$, 故 **C** 错误;

对于 D, 由 $3 < a < 10$ 得 $9 < a^2 < 100$, 由 $5 < b < 30$ 得 $\frac{1}{30} < \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$,

则 $\frac{3}{10} < \frac{a^2}{b} < 20$,

因此 $\frac{23}{10} < \frac{a^2}{b} + 2 < 22$, 即 $\frac{23}{10} < \frac{a^2+2b}{b} < 22$, 故 **D** 正确. 故选 BD.

13. B 【解析】设 $4a-2b = m(a-b) + n(a+b)$, 则 $4a-2b = (m+n)a - (m-n)b$,

则有 $\begin{cases} m+n=4, \\ m-n=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ n=1, \end{cases}$



$$\therefore 4a-2b=3(a-b)+(a+b),$$

$$\text{又 } a-b \in [0, 1], a+b \in [2, 4],$$

$$\therefore \text{由不等式的同向可加性得 } 4a-2b \in [2, 7].$$

故选 B.

14. [15, 19] 【解析】因为 $x+y=4-z, 2x-y=5-z$,

$$\text{所以 } x=3-\frac{2z}{3}, y=1-\frac{z}{3}.$$

$$\text{由 } x, y, z \geq 0, \text{ 得 } \begin{cases} 3-\frac{2z}{3} \geq 0, \\ 1-\frac{z}{3} \geq 0, \\ z \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 \leq z \leq 3, \text{ 故 } M=4x+3y+5z=$$

$$4\left(3-\frac{2z}{3}\right)+3\left(1-\frac{z}{3}\right)+5z=\frac{4z}{3}+15 \in [15, 19].$$

15. $\frac{3}{5}$ 【解析】因为 $M=\max\{|2a-b|, |a+b|, |1-a|\}$, 所以

$$|2a-b| \leq M, |a+b| \leq M, |3-3a| \leq 3M,$$

$$\text{相加得 } |2a-b|+|a+b|+|3-3a| \leq 5M,$$

$$\text{即 } 5M \geq |2a-b|+|a+b|+|3-3a| \geq |(2a-b)+(a+b)+(3-3a)|=3, \text{ 所以 } M \geq \frac{3}{5}, \text{ 当且仅当 } 2a-b, a+b, 3-3a \text{ 同号且}$$

$$|2a-b|=|a+b|=|1-a|, \text{ 即 } a=\frac{2}{5}, b=\frac{1}{5} \text{ 时取等号, 所以 } M$$

$$\text{的最小值为 } \frac{3}{5}.$$

真题风向练

16. $\frac{1}{5}$ 命题点 ①换元法

【解析】令 $b-a=m, c-b=n, 1-c=p$, 其中 $m, n, p > 0$,

突破点

$$\text{所以 } \begin{cases} c=1-p, \\ b=1-p-n, \\ a=1-p-n-m. \end{cases}$$

$$\text{若 } b \geq 2a, \text{ 则 } 1-p-n \geq 2(1-p-n-m), \text{ 即 } 2m+n+p \geq 1;$$

$$\text{若 } a+b \leq 1, \text{ 则 } 1-p-n+1-p-n-m \leq 1, \text{ 即 } m+2n+2p \geq 1.$$

$$\text{令 } A=\max\{b-a, c-b, 1-c\}=\max\{m, n, p\}.$$

突破点

$$\text{当 } b \geq 2a \text{ 时, } 4A \geq 2m+n+p \geq 1, \text{ 解得 } A \geq \frac{1}{4};$$

$$\text{当 } a+b \leq 1 \text{ 时, } 5A \geq m+2n+2p \geq 1, \text{ 解得 } A \geq \frac{1}{5}.$$

$$\text{综上, } A \geq \frac{1}{5} \text{ (易错: 题干条件中的关键词是“或”, 所以运算}$$

$$\text{结果取并集), 当 } c=\frac{4}{5}, b=\frac{3}{5}, a=\frac{2}{5} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以 } \max\{b-a, c-b, 1-c\} \text{ 的最小值为 } \frac{1}{5}.$$

第2节 基本不等式



题型上分练

1. C 【解析】由基本不等式得 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4$, 当且仅当 $a =$



$b=2$ 时取等号,故 ab 的最大值为 4. 故选 C.

2. C 【解析】依题意得 $2m+n=1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)(2m+n) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} + 2 = 4 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n}$, 因为 $mn > 0$, 所以 $\frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \geq 2\sqrt{\frac{n}{m} \times \frac{4m}{n}} = 4$, 当且仅当 $\frac{n}{m} = \frac{4m}{n}$, 即 $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 8. 故选 C.

3. B 【解析】因为 $m^2 + 4n^2 = 5$, 所以 $m - \frac{2m}{2n+3} = \frac{m(2n+1)}{2n+3} \leq \frac{m^2 + (2n+1)^2}{2(2n+3)} = \frac{m^2 + 4n^2 + 4n + 1}{2(2n+3)} = \frac{4n+6}{2(2n+3)} = 1$, 当且仅当 $m = 2n+1$, 即 $m=2, n=\frac{1}{2}$ 时取等号. 故选 B.

4. C 【解析】因为 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号), $ab = a+b+4$, 所以 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a+b+4$, 令 $t = a+b, t > 0$, 所以 $t^2 - 4t - 16 \geq 0$, 解得 $t \leq 2 - 2\sqrt{5}$ (舍去) 或 $t \geq 2 + 2\sqrt{5}$, 即 $a+b \geq 2 + 2\sqrt{5}$, 当且仅当 $a=b=1+\sqrt{5}$ 时取等号, 所以 $a+b$ 的最小值为 $2+2\sqrt{5}$.

5. C 【解析】因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 所以 $\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 3 + \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ (提示: 齐次化法, 将 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 代入分子部分进行整理) (另解: 利用“1”的代换, $\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \left(\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 3 + \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$), 因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $0 < \sin^2 \alpha < 1, 0 < \cos^2 \alpha < 1$, 所以根据基本不等式的性质可得 $\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 3 + \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$, 即 $\tan^2 \alpha = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 此时 $\frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ 取得最小值, 为 $3+2\sqrt{2}$. 故选 C.

6. AD 【解析】因为 $a^2 - ab = a(a-b) > 0$, 所以 $a^2 > ab$, 因为 $ab - b^2 = b(a-b) > 0$, 所以 $ab > b^2$, 所以 $a^2 > ab > b^2$, 故 A 正确;

由于不等式 $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2 + 2} \geq 2$ 中等号成立的条件 $x^2 + 2 = \frac{1}{x^2 + 2}$ 不成立, 故 B 错误;

因为 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, 当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立, 所以 $a^2 + b^2 \geq 2$, 故 C 错误;

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}(x+2-x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2-x}{x} + \frac{x}{2-x}\right) \geq$



$\frac{1}{2}(2+2)=2$, 当且仅当 $\frac{2-x}{x}=\frac{x}{2-x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立, 故 D

正确. 故选 AD.

易错警示 忽略利用基本不等式求最值的条件致误

利用基本不等式求最值时, 要注意必须满足的三个条件: “一正、二定、三相等”.

(1) “一正”就是各项必须为正数;

(2) “二定”就是含变量的各项的和或积必须是定值;

(3) “三相等”是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号, 则得到的就不是所求的最值, 这也是最容易出现错误的地方.

7. D 【解析】正数 a, b, c 满足 $2a+b+3c=8$,

故 $2(a+c)+(b+c)=8$.

令 $a+c=m, b+c=n$, 故 $2m+n=8, m>0, n>0$,

$$\frac{a+b+2c}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{a+c+b+c}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{a+c}{b+c} + \frac{1}{a+c} + 1 = \frac{m}{n} + \frac{1}{m} + 1 = \frac{8-n}{2n} +$$

$$\frac{1}{m} + 1 = \frac{4}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{2}.$$

$$\frac{4}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{m} \right) (2m+n) = \frac{1}{8} \left(\frac{8m}{n} + 4 + 2 + \frac{n}{m} \right) \geq \frac{1}{8} \left(6 +$$

$$2\sqrt{\frac{8m}{n} \cdot \frac{n}{m}} \right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}, \text{ 当且仅当 } \frac{8m}{n} = \frac{n}{m}, \text{ 即 } m=4\sqrt{2}-4, n=$$

$16-8\sqrt{2}$ 时, 等号成立.

$$\text{故 } \frac{a+b+2c}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{4}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5+2\sqrt{2}}{4}. \text{ 故选 D.}$$

8. A 【解析】方法一(双换元法): 令 $m=a-1, n=b-2$, 则 $a=m+1, b=n+2$, 由 $2a+b=ab$, 得 $2(m+1)+n+2=(m+1)(n+2)$, 即

$$mn=2, \text{ 因为 } a>1, b>2, \text{ 所以 } m, n>0, \text{ 则 } \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-2} = \frac{m+1}{m} +$$

$$\frac{n+2}{n} = 2 + \frac{1}{m} + \frac{2}{n} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{2}{n}} = 4, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{m} = \frac{2}{n}, \text{ 即}$$

$$m=1, n=2 \text{ 时等号成立. 所以 } \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-2} \text{ 的最小值为 } 4.$$

方法二(直接法): 因为 $2a+b=ab$, 所以 $(a-1)(b-2)=2$,

关键点

因为 $a>1, b>2$, 所以 $a-1>0, b-2>0$,

$$\text{又 } \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-2} = \frac{a-1+1}{a-1} + \frac{b-2+2}{b-2} = 2 + \frac{1}{a-1} + \frac{2}{b-2} \geq 2 +$$

$$2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot \frac{2}{b-2}} = 4, \text{ 当且仅当 } a=2, b=4 \text{ 时等号成立, 所以}$$

$$\frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-2} \text{ 的最小值为 } 4.$$

9. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $m>0, n>0$, 且 $\log_3 2^m + \log_3 4^n = \log_9 16$, 即

$$m\log_3 2 + \log_3 2^{2n} = m\log_3 2 + 2n\log_3 2 = (m+2n)\log_3 2 = \log_{3^2} 2^4 =$$

$$2\log_3 2, \text{ 所以 } m+2n=2.$$

由基本不等式可得 $2=m+2n \geq 2\sqrt{2mn}$, 可得 $mn \leq \frac{1}{2}$, 当且仅



$$\text{当} \begin{cases} m+2n=2, \\ m=2n, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m=1, \\ n=\frac{1}{2} \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

因此 mn 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

10. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 【解析】 $f(0) \cdot f(1) = 8bc(1-b)(1-2c)$, 因为 $0 <$

$b < 2c < 1$, 所以 $1-b > 0, 1-2c > 0, f(0) \cdot f(1) > 0$.

故 $f(0) \cdot f(1) = 8bc(1-b)(1-2c) = 4 \cdot b(1-b) \cdot 2c(1-2c) \leq 4 \left(\frac{1-b+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-2c+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $b = \frac{1}{2}, c =$

关键点

$\frac{1}{4}$ 时等号成立, 但 $0 < b < 2c < 1$, 故等号取不到. 所以 $f(0) \cdot$

$f(1)$ 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

11. B 【解析】因为正实数 x, y 满足 $x+y - \frac{1}{2}xy = 0$, 所以 $\frac{1}{x} +$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, 则 $x+y = 2(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2 \left(2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 8$, 当

且仅当 $x=y=4$ 时取等号, 因为不等式 $x+y-a > 0$ 恒成立, 所以 $a < 8$, 即 a 的取值范围是 $\{a \mid a < 8\}$. 故选 B.

12. D 【解析】 $\because ab+b^2+1 \geq m(a+b), \therefore b(a+b)+1 \geq m(a+b)$,

又 $a > 0, b > 0, \therefore m \leq b + \frac{1}{a+b}$ 恒成立,

$\therefore m$ 的最大值为 $\left(b + \frac{1}{a+b}\right)_{\min}$ (提示: 参变分离, 将不等式恒

成立问题转化为最值问题), $\because a \leq b+1, \therefore b + \frac{1}{a+b} \geq b + \frac{1}{2b+1} =$

$b + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{b + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ (提示: 配凑法), 当

且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 且 $b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 时取等号, $\therefore m$ 的最大值为

$\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. 故选 D.

13. B 【解析】因为 $x > 0, y > 0$, 且 $x+y=5$, 所以 $x+1+y+2=8$, 所

以 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+2}\right) [(x+1) + (y+2)] = \frac{1}{8} \left[5 +$

$\frac{4(y+2)}{x+1} + \frac{x+1}{y+2}\right] \geq \frac{1}{8} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4(y+2)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{y+2}}\right) = \frac{9}{8}$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{4(y+2)}{x+1} = \frac{x+1}{y+2}, \\ (x+1) + (y+2) = 8, \end{cases}$ 即 $x = \frac{13}{3}, y = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+2}$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$.

因为 $\frac{4}{x+1} + \frac{1}{y+2} \geq 2m+1$ 恒成立, 所以 $2m+1 \leq \frac{9}{8}$, 解得 $m \leq$

$\frac{1}{16}$, 所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{16}\right]$. 故选 B.



14. D 【解析】 $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = ab + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = ab + \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{1}{ab} = ab + \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + \frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{ab} - 2.$

因为 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 所以 $0 < ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

设 $ab = t, t \in \left(0, \frac{1}{4}\right], g(t) = t + \frac{2}{t} - 2,$

函数 $g(t)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ 上单调递减, 所以函数 $g(t)$ 的最

小值为 $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4}$. 故 $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$. 故

选 D.

15. C 【解析】令函数 $t = x + \frac{1}{x}$, 根据对勾函数的性质, 可知函

数 $t = x + \frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{10}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $[1, 10)$ 上单调递增,

所以当 $x \in \left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 时, $t \in [2, 10.1)$,

由 $y = \sin t = 0$ 得 $t = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

当 $k = 1, 2, 3$ 时, t 的值分别对应 $\pi, 2\pi, 3\pi \in [2, 10.1)$.

又因为 $x + \frac{1}{x} = \pi, 2\pi, 3\pi$ 在 $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 上各有 2 个解, 所以

$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 上有 6 个零点. 故选 C.

16. 3 【解析】 $f(x) = |x| + \frac{4}{|x|+1}$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(-x) =$

$$|-x| + \frac{4}{|-x|+1} = |x| + \frac{4}{|x|+1} = f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为偶函数 (提示:}$$

可以研究 y 轴及 y 轴右侧的图象, 然后将其对称过去).

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = x + \frac{4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 1 \geq$

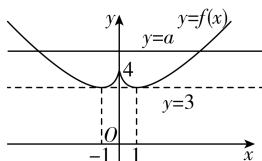
$$2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 3, \text{ 当且仅当 } x+1 = \frac{4}{x+1}, \text{ 即 } x=1 \text{ 时, 等}$$

号成立.

由对勾函数的性质可知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且在 $x=1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 3$.

由对称性可得 $f(-1) = 3$, 又 $f(0) = 4$, 所以作出其大致图象如图所示.

因为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点, 由图象可知 $a=3$ 或 $a>4$, 因此 a 的最小值为 3.





综合提分练

1. D 必刷方法 ⊙ 配凑法

【解析】由 $x \in (0, 4)$, 得 $-x \in (-4, 0)$, $4-x \in (0, 4)$, 则 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{16}{4-x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{16}{4-x} \right) (x+4-x) = \frac{1}{4} \left(17 + \frac{4-x}{x} + \frac{16x}{4-x} \right) \geq \frac{1}{4} \left(17 + 2\sqrt{\frac{4-x}{x} \times \frac{16x}{4-x}} \right) = \frac{25}{4}$, 当且仅当 $\frac{4-x}{x} = \frac{16x}{4-x}$, 即 $x = \frac{4}{5}$ 时等号成立, 故选 D.

2. D 必刷考点 ⊙ 等差中项的性质、利用基本不等式求和的最小值

【解析】 $\because a_s + a_t = 2a_3, \therefore s+t=6, \therefore \frac{s}{6} + \frac{t}{6} = 1$, 显然 $s, t \in \mathbf{N}^*$.
 $\therefore \frac{4}{s} + \frac{1}{t} = \left(\frac{4}{s} + \frac{1}{t} \right) \left(\frac{s}{6} + \frac{t}{6} \right) = \frac{2}{3} + \frac{2t}{3s} + \frac{s}{6t} + \frac{1}{6} \geq \frac{5}{6} + 2\sqrt{\frac{2t}{3s} \cdot \frac{s}{6t}} = \frac{3}{2}$, 当且仅当 $\frac{2t}{3s} = \frac{s}{6t}$, 即 $t=2, s=4$ 时取等号.
 故选 D.

3. B 必刷题型 ⊙ 基本不等式与函数的综合应用

【解析】已知函数 $f(x) = |2\ln x - 1|$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $a > 0, b > 0$, 若 $f(a) = f(b)$, 则 $|2\ln a - 1| = |2\ln b - 1|$, 由于 $a \neq b$, 则 $2\ln a - 1 = 1 - 2\ln b$ (提示: 结合对数函数的图象与性质理解), 即 $\ln(ab) = 1, ab = e$, 而 $16^a \cdot 8^b = 2^{4a} \cdot 2^{3b} = 2^{4a+3b}$, 因为函数 $y = 2^x$ 为增函数, 所以当 $4a+3b$ 取最小值时, $16^a \cdot 8^b$ 取最小值. 由基本不等式可得 $4a+3b \geq 2\sqrt{12ab} = 4\sqrt{3e}$, 当且仅当 $4a=3b$, 即 $a = \frac{\sqrt{3e}}{2}, b = \frac{2\sqrt{3e}}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $(16^a \cdot 8^b)_{\min} = 2^{4\sqrt{3e}} = 16^{\sqrt{3e}}$. 故选 B.

4. D 必刷题型 ⊙ 经济学背景下的基本不等式问题

【解析】当 A 不变, K 与 L 均变为原来的 2 倍时, $Q_1 = A(2K)^\alpha (2L)^\beta = 2^{\alpha+\beta} AK^\alpha L^\beta = 2^{\alpha+\beta} Q$.

若 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 且 $0 < \beta < \frac{1}{2}$, 则 $1 = 2^{0+0} < 2^{\alpha+\beta} < 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2$, 故 A 错误;

若 $\alpha > \frac{1}{2}$ 且 $\beta > \frac{1}{2}$, 则 $2^{\alpha+\beta} > 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2$, 故 B 错误;

若 $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, 则 $2^{\alpha+\beta} \geq 2^{2\sqrt{\alpha\beta}} = 2$, 当且仅当 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 即若 $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, 则 Q 至少变为原来的 2 倍, 故 C 错误;

若 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$, 则由 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2) = 1$, 当且仅当 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 可得 $2^{\alpha+\beta} \leq 2^{\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}} = 2$, 故 D 正确. 故选 D.

5. A 必刷题型 ⊙ 不等式中的恒成立问题

【解析】因为 $f(x) = x^3 - x$, 所以 $f(a) = a^3 - a, f(b) = b^3 - b$,



又 $f(a)+f(b)=-2b$, 所以 $a^3-a+b^3-b=-2b$, 即 $a^3+b^3=a-b$.

因为 $a>0, b>0$, 所以 $a^3+b^3>0$, 所以 $a>b>0$, 所以 $\frac{a^3+b^3}{a-b}=1$.

又 $a^2+\lambda b^2 \leq 1$, 所以 $a^2+\lambda b^2 \leq \frac{a^3+b^3}{a-b}$, 所以 $\lambda b^2 \leq \frac{b^3+a^2b}{a-b}$, 所以

$$\lambda \leq \frac{b^2+a^2}{ab-b^2} = \frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b}-1}.$$

令 $t=\frac{a}{b}$, 则 $t>1$, 所以 $\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b}-1} = \frac{1+t^2}{t-1} = \frac{t^2-1+2}{t-1} = t+1+\frac{2}{t-1} =$

$$(t-1)+\frac{2}{t-1}+2 \geq 2\sqrt{(t-1) \cdot \frac{2}{t-1}}+2=2+2\sqrt{2},$$

当且仅当 $t-1=\frac{2}{t-1}$, 即 $t=\sqrt{2}+1$ 时取等号,

所以 $\left(\frac{b^2+a^2}{ab-b^2}\right)_{\min} = 2+2\sqrt{2}$, 所以 $\lambda \leq 2+2\sqrt{2}$,

则实数 λ 的最大值为 $2+2\sqrt{2}$. 故选 A.

6. BCD 必刷题型 ⊙ 基本不等式的综合应用

【解析】对于 A, 当 $z=1$ 时, 由 $x^2+4y^2+3z^2=4$ 得 $x^2+4y^2=1$, 即

$(x+2y)^2-2x \cdot (2y)=1$, 又 $x, y, z \in (0, +\infty)$, 所以 $1=(x+$

$2y)^2-2x \cdot (2y) \geq (x+2y)^2-2 \times \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x+2y)^2$ (提示:

配凑法), 所以 $(x+2y)^2 \leq 2$, 又 $x, y \in (0, +\infty)$, 则 $0 < x+2y \leq$

$\sqrt{2}$, 当且仅当 $x=2y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以 A 错误.

对于 B, 因为 $4=x^2+4y^2+3z^2=x^2+y^2+3(y^2+z^2) \geq 2xy+6yz$, 所

以 $xy+3yz \leq 2$, 当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号 (提示: 配凑后,

两次使用基本不等式, 注意取等条件的验证), 所以 B 正确.

对于 C, 由 $x^2+4y^2+3z^2=4$ 得 $x^2+3z^2=4-4y^2>0$, 则 $0 < y < 1$, 所

以 $4-4y^2 \geq 2\sqrt{3}xz$, 当且仅当 $x=\sqrt{3}z$ 时取等号, 则 $xy^3z \leq$

$\frac{(4-4y^2)y^3}{2\sqrt{3}} = \frac{2(1-y^2)y^3}{\sqrt{3}}$, 令 $f(y)=(1-y^2)y^3$, 则 $f'(y)=3y^2-$

$5y^4=y^2(3-5y^2)$, 当 $y \in \left(0, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ 时, $f'(y)>0$; 当 $y \in$

$\left(\frac{\sqrt{15}}{5}, 1\right)$ 时, $f'(y)<0$,

所以 $f(y)=(1-y^2)y^3$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{\sqrt{15}}{5}, 1\right)$ 上单调递减, 故当 $y=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时, $f(y)=(1-y^2)y^3$ 取

得最大值, 即 xy^3z 取得最大值时, $y=\frac{\sqrt{15}}{5}$, 所以 C 正确.



对于 D, 由选项 C 的分析可知 $x^2 + 3z^2 = 4 - 4y^2 = 4(1-y)(1+y) \geq 2\sqrt{3}xz$, 当且仅当 $x = \sqrt{3}z$ 时取等号, $0 < y < 1$,

所以 $\frac{y+1}{xyz} \geq \frac{\sqrt{3}xz}{2(1-y)xyz} = \frac{\sqrt{3}}{2(1-y)y}$, 当且仅当 $x = \sqrt{3}z$ 时取等

号, 又因为 $0 < y < 1$, 所以 $2(1-y)y \leq 2\left(\frac{1-y+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, 当且仅

当 $y = \frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 $\frac{y+1}{xyz} \geq 2\sqrt{3}$, 当且仅当

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}z, \\ x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 4, \text{ 即 } x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时取等号, 此时 } xy = \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{6}}{4}$, 所以 D 正确.

7. $\sqrt{2}$ 必刷考点 ⊙“1”的代换

【解析】由 $3^a \cdot 9^b = 3$ 得 $3^a \cdot 3^{2b} = 3^{a+2b} = 3^1$, 即 $a+2b=1$ ($b>0$),

则 $a+3b = a+2b+b = b+1 > 1$, $\frac{b+1}{2b} + \frac{b}{a+3b} = \frac{b+(a+2b)}{2b} + \frac{b}{a+3b} =$

$\frac{a+3b}{2b} + \frac{b}{a+3b} \geq 2\sqrt{\frac{a+3b}{2b} \cdot \frac{b}{a+3b}} = \sqrt{2}$ (提示: 利用“1”的代换替

换部分分子), 当且仅当 $\frac{a+3b}{2b} = \frac{b}{a+3b}$, 即 $a = -2\sqrt{2}-1, b = \sqrt{2}+1$

时取等号, 因此 $\frac{b+1}{2b} + \frac{b}{a+3b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

8. 10 必刷考点 ⊙柯西不等式的应用

【解析】由 $y = \ln(x+b)$, 得 $y' = \frac{1}{x+b}$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则

$\frac{1}{x_0+b} = 1$, 故 $x_0 = 1-b$.

又 $y_0 = x_0 - 2a, y_0 = \ln(x_0+b)$, 所以 $y_0 = \ln(x_0+b) = 0, x_0 - 2a = 0$, 所以 $2a+b=1$.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right)} \geq \frac{1}{a} +$

$\frac{1}{b} + \frac{4}{5a} + \frac{3}{5b} = \frac{9}{5a} + \frac{8}{5b} = \left(\frac{9}{5a} + \frac{8}{5b}\right)(2a+b) = \frac{18}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9b}{5a} +$

$\frac{16a}{5b} \geq \frac{26}{5} + 2\sqrt{\frac{9b}{5a} \cdot \frac{16a}{5b}} = 10$, 当且仅当 $\frac{3}{5a} = \frac{4}{5b}$ 且 $\frac{9b}{5a} = \frac{16a}{5b}$, 即

$a = \frac{3}{10}, b = \frac{2}{5}$ 时等号成立, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ 的最小值

为 10.

真题风向练

9. B 命题点 ⊙指数运算、基本不等式

【解析】 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} = \log_2 \frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2} \geq \log_2 \sqrt{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = \log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}} =$

$\frac{x_1+x_2}{2}$, $\because x_1 \neq x_2, \therefore$ 等号取不到, 即 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > \frac{x_1+x_2}{2}$. 故选 B.



第3节 二次函数与一元二次不等式



题型上分练

1. C 【解析】 $M = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$, $N = \{x | -\pi < x < 2\pi, x \in \mathbf{Z}\}$,
 $\therefore M \cap N = \{x | -\pi < x < -3 \text{ 或 } 3 < x < 2\pi, x \in \mathbf{Z}\} = \{4, 5, 6\}$. 故选 C.

2. A 【解析】依题意, $a < 0$, 原不等式可化为 $a(x+2) \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) > 0$.

显然 $-2, \frac{1}{a}$ 是关于 x 的方程 $ax^2 + (2a-1)x - 2 = 0$ 的两个根,

所以只需 $-2 < \frac{1}{a}$, 解得 $a < -\frac{1}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. 故选 A.

3. A 【解析】不等式一次项系数含参, 且不等式对应的方程的根的大小不确定, 故以此作为依据分类讨论. 关于 x 的不等式 $x^2 - (m+2)x + 2m < 0$ 可化为 $(x-2)(x-m) < 0$, 当 $m=2$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$, 不符合题意; 当 $m < 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x | m < x < 2\}$, 若解集中恰有 3 个整数, 则这 3 个整数为 $-1, 0, 1$, 所以 $-2 \leq m < -1$ (提示: 因为关于 x 的不等式 $x^2 - (m+2)x + 2m < 0$ 不带等号, 所以 m 可以等于 -2); 当 $m > 2$ 时, 不等式的解集为 $\{x | 2 < x < m\}$, 若解集中恰有 3 个整数, 则这 3 个整数为 $3, 4, 5$, 所以 $5 < m \leq 6$. 综上, 实数 m 的取值范围为 $\{m | -2 \leq m < -1 \text{ 或 } 5 < m \leq 6\}$. 故选 A.

4. A 【解析】题干中的分式不等式等价于二次项含参的不等式, 故需对 a 的符号进行分类讨论, 并在此基础上讨论不等式所对应方程根的大小. 若 $a < 0$, 则 $\frac{a}{(x-a)(x+1)} > 0$ 等价于 $(x-a)(x+1) < 0$, 当 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | a < x < -1\}$, 故 B 不符合题意; 当 $a = -1$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$, 故 D 不符合题意; 当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | -1 < x < a\}$, 故 C 不符合题意. 若 $a > 0$, 则 $\frac{a}{(x-a)(x+1)} > 0$ 等价于 $(x-a)(x+1) > 0$, 则不等式的解集为 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > a\}$. 若 $a = 0$, 则不等式的解集为 $\emptyset$. 故选 A.

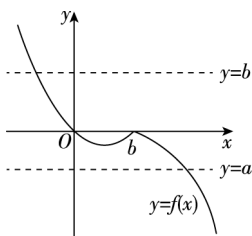
5. A 【解析】 $f(x) = 2ax|x-b| = \begin{cases} 2ax(x-b), & x \geq b, \\ -2ax(x-b), & x < b. \end{cases}$

根据选项可知只需要考虑 $b > 0$ 即可.

关键点

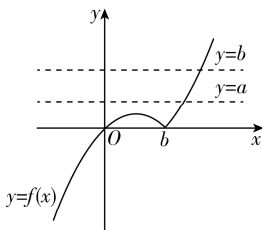
若不等式 $a \leq f(x) \leq b$ 的解集为 $\{x | a \leq x \leq 2b\}$,

则当 $a < 0$ 时, $\begin{cases} f(a) = b, \\ f(2b) = a, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} -2a^2(a-b) = b, \\ 2a \times 2b(2b-b) = a, \end{cases}$ 解得 $b = \frac{1}{2}$.



图①

当 $a > 0$ 时, 无法满足 $a \leq f(x) \leq b$ 的解集为 $\{x \mid a \leq x \leq 2b\}$, 故舍去.



图②

故选 A.

6. $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 【解析】由于 $a > 1$, 故原不等式等价于 $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x - 1) < 0$. 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 所以所求不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\}$.

7. $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$ 【解析】因为不等式 $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 2$ ($a > 0$) 的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$,

所以二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴为直线 $x = 1$,

$$\text{且需满足 } \begin{cases} f(-1) = 2, \\ f(3) = 2, \\ f(1) \geq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a - b + c = 2, \\ 9a + 3b + c = 2, \\ a + b + c \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = -2a, \\ c = -3a + 2, \end{cases}$$

所以 $a + b + c = a - 2a - 3a + 2 \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{1}{2}$, 所以 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

所以 $3a + b + 2c = 3a - 2a - 6a + 4 = 4 - 5a \in \left[\frac{3}{2}, 4\right)$.

关键点拨 本题的解题关键在于将一元二次不等式问题转化为二次函数问题, 利用图象的对称轴和端点的取值表示出变量关系, 进而用同一个变量来表示所求代数式, 从而得出取值范围.

8. D 【解析】依题意, $\lg x \cdot \lg x^k + k \lg x - 1 = k(\lg x)^2 + k \lg x - 1 < 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}_+$ 恒成立.

当 $k = 0$ 时, 不等式对一切 $x \in \mathbf{R}_+$ 恒成立;

当 $k \neq 0$, $x \in \mathbf{R}_+$ 时, $\lg x \in \mathbf{R}$, 则有 $\begin{cases} k < 0, \\ \Delta = k^2 + 4k < 0, \end{cases}$ 解得 $-4 < k < 0$.

所以 k 的取值范围是 $(-4, 0]$. 故选 D.



9. D 【解析】关于 x 的不等式 $x^2 - (m+1)x + 9 \leq 0$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 等价于 $(m+1)x \geq x^2 + 9$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 即 $m+1 \geq x + \frac{9}{x}$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解.

又 $x + \frac{9}{x} \geq 6$, 当且仅当 $x=3$ 时, 等号成立,

故 $m+1 \geq 6$, 解得 $m \geq 5$. 故选 D.

10. A 【解析】由题得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2x - 2a + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2ax + 1}{x}$,

由于函数 $f(x)$ 在定义域内存在单调递减区间, 故 $f'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 则 $2x^2 - 2ax + 1 < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解 (提示: 将单调区间问题转化为导函数的符号问题, 进而转化为一元二次不等式有解问题). 令 $g(x) = 2x^2 - 2ax + 1$, 其图象

开口向上, 对称轴为直线 $x = \frac{a}{2}$, 且 $g(0) = 1$, 则

$$\begin{cases} \frac{a}{2} > 0, \\ \Delta = 4a^2 - 8 > 0 \end{cases} \quad (\text{易错: 注意根的判别式取不到等号}),$$

所以 $a > \sqrt{2}$, 即实数 a 的取值范围是 $(\sqrt{2}, +\infty)$. 故选 A.

11. B 【解析】令 $f(x) = mx^2 - 2x + 3$, 当 $m < 0$ 时, $f(x) = mx^2 - 2x + 3$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $x = \frac{1}{m} < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 由函数的连续性知必存在 $x_0 > 1$ 使得 $f(x_0) \leq 0$, 故 $m < 0$ 满足

条件. 当 $m = 0$ 时, 不等式可化为 $-2x + 3 \leq 0$, 解得 $x \geq \frac{3}{2}$, 故

$m = 0$ 满足条件. 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 的图象开口向上, 由题知需满足 $\Delta = 4 - 12m \geq 0$, 即 $0 < m \leq \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{m} \geq 3$, $f(x)$ 的最小

值 $f\left(\frac{1}{m}\right) = -\frac{1}{m} + 3 \leq 0$, 所以当 $0 < m \leq \frac{1}{3}$ 时, 存在 $x_0 > 1$ 使得

$f(x_0) \leq 0$, 故 $0 < m \leq \frac{1}{3}$ 满足条件. 综上, m 的取值范围为

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$. 故选 B.

12. A 【解析】由 $(1, +\infty) \subseteq M$, 可知 $f(x) = 2^{ax^2 - x + 1} \leq 1$ 有解, 且 $f(x)$ 无最大值, 即 $ax^2 - x + 1 \leq 0$ 有解, 且 $y = ax^2 - x + 1$ 无最大值.

当 $a = 0$ 时, $-x + 1 \leq 0$ 有解, $f(x) = 2^{-x+1}$ 无最大值, 符合题意;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 有最大值, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $ax^2 - x + 1 \leq 0$ 有解需满足 $\Delta = 1 - 4a \geq 0$, 解得 $0 <$

$a \leq \frac{1}{4}$, 此时 $f(x) = 2^{ax^2 - x + 1}$ 无最大值, 符合题意.



综上,实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. 故选 A.

13. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 【解析】易知 $f(x) = \cos 2x - 2a \cos x - 2 =$

$2\cos^2 x - 2a \cos x - 3 < 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

设 $t = \cos x, t \in [-1, 1]$, 则 $y = 2t^2 - 2at - 3 < 0$ 在 $t \in [-1, 1]$ 上

恒成立, 则 $\begin{cases} 2+2a-3 < 0, \\ 2-2a-3 < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

14. $[-6, 6]$ 【解析】令 $f(x) = p(x^2 + 1) + q$, 则当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 为单调函数或常数函数.

若当 $x \in [0, 2]$ 时, 不等式 $|p(x^2 + 1) + q| \leq 2$ 恒成立, 则

$|f(0)| = |p + q| \leq 2, |f(2)| = |5p + q| \leq 2$, 所以 $-2 \leq p + q \leq 2$,

$-2 \leq 5p + q \leq 2$, 所以 $-4 \leq 2(p + q) \leq 4$, 所以 $-6 \leq 7p + 3q = 2(p + q) + (5p + q) \leq 6$.

15. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 【解析】对于函数 $y = x^2 - (2a + 1)x + 1$,

①若 $\Delta = (2a + 1)^2 - 4 \leq 0$, 则 $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, 此时 $y = x^2 - (2a +$

$1)x + 1 \geq 0$ 恒成立, 故只需 $\frac{1}{2} \sin x - 2a \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成

立即可, 即 $a \geq \frac{1}{4} \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 因为 $-\frac{1}{4} \leq$

$\frac{1}{4} \sin x \leq \frac{1}{4}$, 所以 $a \geq \frac{1}{4}$, 故 $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$.

②若 $\Delta = (2a + 1)^2 - 4 > 0$, 则 $a < -\frac{3}{2}$ 或 $a > \frac{1}{2}$,

当 $a < -\frac{3}{2}$ 时, $\frac{1}{2} \sin x - 2a > \frac{1}{2} \sin x + 3 > 0$ 恒成立, 因此只需满

足 $y = x^2 - (2a + 1)x + 1 \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立即可, 不妨取

$x = 1$, 此时 $y = 1 - (2a + 1) + 1 = 1 - 2a$, 由于 $a < -\frac{3}{2}$, 故 $1 - 2a >$

4, 故 $a < -\frac{3}{2}$ 不合题意;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{2} \sin x - 2a < 0$ 恒成立, 因此只需满足 $y = x^2 -$

$(2a + 1)x + 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立即可, 不妨取 $x = 1$, 此

时 $y = 1 - (2a + 1) + 1 = 1 - 2a$, 由于 $a > \frac{1}{2}$, 故 $1 - 2a < 0$, 故 $a > \frac{1}{2}$

不合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

16. $\sqrt{2} - 1$ 【解析】令 $x = 1$, 则 $4 \leq a + b + c \leq 4$, 故 $a + b + c = 4$. 因为

关键点

对任意 $x \in \mathbf{R}$, $2x + 2 \leq ax^2 + bx + c$, 所以 $ax^2 + (b - 2)x + c - 2 \geq 0$

对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立(提示: 先验证左侧). 当 $a = 0$ 时, $(b - 2)x +$

$c - 2 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $b = 2, c - 2 \geq 0$, 因为 $a + b + c = 4$, 所



以 $c=2$, 此时 $ax^2+bx+c=2x+2 \leq 2x^2-2x+4$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立(提示: 检验右侧), 符合题意,

$$\text{此时 } \frac{1}{b} - a = \frac{1}{2}.$$

当 $a \neq 0$ 时, $ax^2+(b-2)x+c-2 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $a > 0$,

$$\Delta = (b-2)^2 - 4a(c-2) = (2-a-c)^2 - 4a(c-2) = (a-c+2)^2 \leq 0,$$

所以 $a-c+2=0$, 即 $c=a+2$, 此时 $b=2-2a > 0$, 则 $a < 1$, 所以

$$\frac{1}{b} - a = \frac{1}{2-2a} - a = \frac{1}{2-2a} + \frac{1}{2} (2-2a) - 1 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{1}{2-2a} \times \frac{1}{2}(2-2a)} - 1 = \sqrt{2} - 1,$$

当且仅当 $\frac{1}{2-2a} = \frac{1}{2}(2-2a)$, 即 $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 此时 $b =$

$$\sqrt{2}, c = \frac{6-\sqrt{2}}{2}, \text{ 则 } 2x^2 - 2x + 4 - (ax^2 + bx + c) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}x^2 -$$

$$(2+\sqrt{2})x + \frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(x-1)^2 \geq 0 \text{ (提示: 利用作差法验证}$$

右侧). 又 $\sqrt{2}-1 < \frac{1}{2}$, 故 $\frac{1}{b} - a$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$.

17. C 【解析】 $|x+1| > 1$, 即 $x+1 > 1$ 或 $x+1 < -1$, 解得 $x > 0$ 或 $x <$

$$-2. \frac{1}{x} > 2, \text{ 即 } \frac{1-2x}{x} > 0, \text{ 解得 } 0 < x < \frac{1}{2}.$$

所以 $A = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, $B = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $A \cap B =$

$$\left(0, \frac{1}{2}\right). \text{ 故选 C.}$$

18. C 【解析】由 $\frac{x-6}{x+1} < 0$, 得 $(x-6)(x+1) < 0$, $\therefore A = \{x | -1 < x <$

$6\}$.

又 $B = \{x | x = 2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示奇数构成的集合, $\therefore A \cap B =$

$\{1, 3, 5\}$. 故选 C.

19. A 【解析】不等式 $\frac{(x+3)(x-2)}{x-1} \geq 0$ 等价于 $\begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 0, \\ x-1 > 0 \end{cases}$

或 $\begin{cases} (x+3)(x-2) \leq 0, \\ x-1 < 0 \end{cases}$ (提示: 也可以直接转化为 $(x+3)(x-$

$2)(x-1) \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 利用“穿针引线法”求解), 解得 $x \geq$

2 或 $-3 \leq x < 1$, 即不等式 $\frac{(x+3)(x-2)}{x-1} \geq 0$ 的解集为 $[-3, 1) \cup$

$[2, +\infty)$. 故选 A.

20. $\frac{9}{2}$ 【解析】因为 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, 所以 $f(x+1) =$

$$(x+1-a)(x+1-b)(x+1-c).$$

令 $f(x+1) = 0$, 可得 $x = a-1$ 或 $x = b-1$ 或 $x = c-1$.

由于 $a < b < c$, 故 $a-1 < b-1 < c-1$.

易知 $f(2-x) = (2-x-a)(2-x-b)(2-x-c)$, 令 $g(x) = -f(2-$



x), 则 $g(x) = (x+a-2)(x+b-2)(x+c-2)$,

令 $g(x) = 0$, 可得 $x = 2-a$ 或 $x = 2-b$ 或 $x = 2-c$.

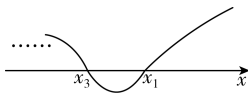
由于 $a < b < c$, 故 $2-c < 2-b < 2-a$.

由 $f(1+x)f(2-x) \leq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立可得 $f(x+1)g(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

若 $c-1 \neq 2-a$, 取 $x_1 = \max\{c-1, 2-a\}$, $x_2 = \min\{c-1, 2-a\}$,
 $x_3 = \max\{x_2, b-1, 2-b\}$,

当 $x > x_1$ 时, $f(x+1) > 0$, $g(x) > 0$, 此时 $f(x+1)g(x) > 0$,

当 $x_3 < x < x_1$ 时, 由“穿针引线法”可知 $f(x+1)g(x) < 0$, 矛盾,



所以 $c-1 = 2-a$, 即 $a+c = 3$, 则 $a-1 = 2-c$.

所以 $f(x+1)g(x) = [x-(a-1)]^2 \cdot [x-(c-1)]^2 \cdot [x-(b-1)] \cdot [x-(2-b)]$.

因为 $f(x+1)g(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $[x-(b-1)] \cdot [x-(2-b)] \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $b-1 = 2-b$,

解得 $b = \frac{3}{2}$, 因此 $a+b+c = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

真题风向练

21. B 必刷题型 含参不等式问题

【解析】分类讨论, 去掉绝对值, 结合一元二次不等式求解.

当 $a > 2$, $x > 2$ 时, $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = \begin{cases} x^2 - ax - 2a^2, & x \geq a, \\ -x^2 + ax - 2a^2, & 2 < x < a. \end{cases}$

当 $2 < x < a$ 时, $f(x) = -x^2 + ax - 2a^2$, 此时 $\Delta = a^2 - 4 \times 2a^2 = -7a^2 < 0$, 所以 $f(x) < 0$, 不满足当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $a > 2$ 不符合题意.

当 $0 < a \leq 2$, $x > 2$ 时, 令 $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = x^2 - ax - 2a^2 = (x-2a)(x+a) > 0$, 解得 $x > 2a$, 由于当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $2a \leq 2$, 解得 $0 < a \leq 1$.

当 $a = 0$, $x > 2$ 时, $f(x) = x^2 > 0$ 恒成立, 符合题意.

当 $a < 0$, $x > 2$ 时, 令 $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = x^2 - ax - 2a^2 = (x-2a)(x+a) > 0$, 解得 $x > -a$, 由于当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $-a \leq 2$, 解得 $-2 \leq a < 0$.

综上, $-2 \leq a \leq 1$. 故选 B.

快解 1 (特殊点讨论法) 注意到 $f(a) = -2a^2$, 所以 $a < 2$.

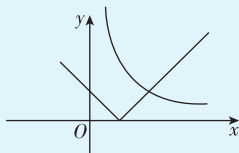
当 $a < 2$, $x > 2$ 时, $f(x) = x^2 - ax - 2a^2$, $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{2} < 1$, 所以当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 单调递增, 则只需 $f(2) \geq 0$, 即 $4 - 2a - 2a^2 \geq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 1$. 故选 B.



快解 2 (数形结合法) 依题意, $x|x-a|-2a^2>0 (x>2)$ 等价

$$\text{于 } |x-a|>\frac{2a^2}{x} (x>2).$$

显然 $a<2$, 且 $|2-a|\geq\frac{2a^2}{2}$, 解得 $-2\leq a\leq 1$. 故选 B.



第 2 章 ▶ 真题综合测试

1. C 命题点 ① 分式不等式的求解

【解析】 因为 $\frac{x-4}{x-1}\geq 2$, 所以 $\frac{x-4}{x-1}-2\geq 0$, 故有 $\frac{-x-2}{x-1}\geq 0$, 即 $\frac{x+2}{x-1}\leq$

0, 等价于 $\begin{cases} (x+2)(x-1)\leq 0, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$ 解得 $-2\leq x<1$, 故原不等式的解

集是 $\{x|-2\leq x<1\}$. 故选 C.

快解 $x-1$ 作为分母, 故 $x\neq 1$, 排除 A.

当 $x=0$ 时, 左边 $=4\geq 2$ 成立, 故 $x=0$ 是不等式的一个解, 排除 B, D. 故选 C.

2. B 命题点 ① 利用基本不等式求最值

【解析】 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}+5\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}+5=9$ (提

示: $x^2>0$), 当且仅当 $x^2=\frac{4}{x^2}$, 即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, 等号成立, 故

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 的最小值为 9, 故选 B.

3. A 必刷考点 ① 基本不等式的应用

【解析】 若 a, b 均为正实数, 且 $ab\leq 1$, 则由基本不等式得 $\frac{1}{a}+$

$\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\geq 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时, 等号成立, 故充分性成立;

若 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$, 则不妨设 $a=0.5, b=6$ (提示: 举反例常应用于

不等式的相关证明中), 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$, 但 $ab=3>1$, 必要性不成立.

综上, “ $ab\leq 1$ ”是“ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

4. A 必刷题型 ① 利用基本不等式求最值

【解析】 因为 $x>3$, 且 $xy+2x-3y=12$, 所以 $y=\frac{12-2x}{x-3}=-2+$

$\frac{6}{x-3}$, 从而 $x+y=x-2+\frac{6}{x-3}=(x-3)+\frac{6}{x-3}+1\geq 2\sqrt{6}+1$, 当且仅

当 $x=\sqrt{6}+3, y=\sqrt{6}-2$ 时等号成立. 所以 $x+y$ 的最小值为 $1+$



$2\sqrt{6}$. 故选 A.

5. D 必刷考点 ⊙ 基本不等式

【解析】由题可知, $a+2+\frac{1}{b+1}=4$, 因为 $a+2>1, b+1>0$, 所以 $b+$

$$1+\frac{9}{a+2}=\frac{1}{4}\left(a+2+\frac{1}{b+1}\right)\left(b+1+\frac{9}{a+2}\right)=\frac{1}{4}\left[(a+2)(b+1)+\frac{9}{(a+2)(b+1)}+10\right] \geq \frac{1}{4} \times (6+10)=4 \text{ (提示: 配凑法)},$$

当且仅当 $a=1, b=0$ 时, 等号成立. 因此, $b+1+\frac{9}{a+2}$ 的最小值

为 4, 故 $b+\frac{9}{a+2}$ 的最小值为 3. 故选 D.

6. C 命题点 ⊙ 函数最值的求法及基本不等式的应用

【解析】A 中, $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3 \geq 3$, 不符合题意.

B 中, $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$, 令 $t=|\sin x|$, 则 $y=t+\frac{4}{t}, t \in (0,$

$1]$. $y=t+\frac{4}{t}$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减 (提示: 对勾函数的单调

性), 因此 $y \geq 1+4=5$, 最小值是 5, 不符合题意.

C 中, $y=2^x+2^{2-x}$, 令 $m=2^x$, 则 $y=m+\frac{4}{m}, m \in (0, +\infty)$, 所以

$y \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{4}{m}}=4$, 当且仅当 $m=2$, 即 $x=1$ 时取等号, 符合题意.

D 中, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln x < 0, y=\ln x+\frac{4}{\ln x} < 0$, 不符合题意.

易错警示 对于 B, 虽然 $|\sin x| \cdot \frac{4}{|\sin x|}$ 是定值, 但是取等

号的条件是 $|\sin x|=\frac{4}{|\sin x|}$, 即 $|\sin x|=2$. 又 $|\sin x| \neq 2$, 此

时不满足基本不等式中取等号的条件, 故不符合题意.

7. ABD 命题点 ⊙ 基本不等式的应用

【解析】由 $a>0, b>0, a+b=1$, 得 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 即 a^2+

$b^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 A 正确;

由 $a>0, b>0, a+b=1$, 得 $a-b=2a-1>-1$, 故 $2^{a-b} > \frac{1}{2}$, 故 B 正

确;

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2$, 当且仅

当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 错误 (另解: 令 $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$,

则 $\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 \frac{3}{4} < -2$, 故 C 错误);

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} = 1+2\sqrt{ab} \leq 1+a+b=2$, 得 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq$

$\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

8. BC 命题点 ⊙ 不等式的性质、基本不等式



【解析】对于 A, B: 由 $x^2+y^2-xy=1$, 得 $(x+y)^2-3xy=1$, 而 $xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$, 所以 $(x+y)^2 - 3 \left[\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} \right] = 1$, 即 $1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$, 所以 $-2 \leq x+y \leq 2$, 所以 A 不正确, B 正确.

对于 C, D: 由 $x^2+y^2-xy=1$, 得 $x^2+y^2-1=xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 所以 $x^2+y^2 \leq 2$, 所以 C 正确; 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $x^2+y^2 < 1$, 所以 D 不正确. 故选 BC.

一题多解 当 $x=1, y=0$ 时, x, y 满足 $x^2+y^2-xy=1$.

设 $A(1, 0), P(x, y)$ 为曲线 $C: x^2+y^2-xy=1$ 上的点.

又点 $O(0, 0)$ 不在曲线 C 上, 设 $\angle AOP = \theta, \theta \in [0, 2\pi)$,

$r = |OP| = \sqrt{x^2+y^2}$, 则 $x = r\cos \theta, y = r\sin \theta$,

则曲线 C 的方程可化为 $(r\cos \theta)^2 + (r\sin \theta)^2 - (r\cos \theta) \cdot (r\sin \theta) = 1$, 即 $r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = 1$,

所以 $r^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta} \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$, 即 $x^2+y^2 \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$.

所以 $r \in \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2} \right]$, 所以 $x+y = r(\cos \theta + \sin \theta) = \sqrt{2}r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \in [-2, 2]$.

所以 A 不正确, B 正确, C 正确, D 不正确. 故选 BC.

方法速记

双配方的应用, 常有两种形式: $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$

$$\frac{(x-y)^2}{4} \text{ 与 } x^2+y^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2}.$$

9. ACD 必刷考点 ⊙ 基本不等式的应用

【解析】对于 A, 由正数 x, y 满足 $x+y+xy=3$, 可得 $x+y = 3-xy \geq 2\sqrt{xy}$, 解得 $0 < \sqrt{xy} \leq 1$, 则 $xy \leq 1$, 当且仅当 $x=y=1$ 时, 等号成立, 即 xy 的最大值为 1, 故 A 正确;

对于 B, 由正数 x, y 满足 $x+y+xy=3$, 可得 $x+y-3 = -xy \geq -\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, 解得 $x+y \geq 2$, 当且仅当 $x=y=1$ 时, 等号成立, 即 $x+y$ 的最小值为 2, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $x > 0, y > 0$, 所以 $\frac{3-x-y}{x^2+y^2} = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x=y=1$ 时, 等号成立, 即 $\frac{3-x-y}{x^2+y^2}$ 的



最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 由 $x+y+xy=3$, 可得 $(x+1)(y+1)=4$, 则 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} \geq$

$2\sqrt{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{y+1}}=1$, 当且仅当 $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{y+1}$, 即 $x=y=1$ 时, 等号成

立, 即 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}$ 的最小值为 1, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. A 必刷题型 ① 数列与一元二次不等式恒成立的综合问题

【解析】对于 $S_n=n^2+m$, 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1+m$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+m-[(n-1)^2+m]=2n-1$,

所以 $a_1=1+m, a_2=3, a_3=5$.

又因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_1=1, m=0$, 所以 $n=1$ 时也满足 $a_n=2n-1$,

从而 $a_n=2n-1, \frac{a_n}{n}=2-\frac{1}{n}<2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

所以 $\frac{a_n}{n}<x^2-(1+a)x-2a^2-a+2$ 恒成立等价于 $x^2-(1+a)x-2a^2-a+2 \geq 2$, 即 $-2a^2-(1+x)a+x^2-x \geq 0$ 恒成立.

令 $g(a)=2a^2+(1+x)a-x^2+x$, 则当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $g(a)=2a^2+(1+x)a-x^2+x \leq 0$ 恒成立,

即 $\begin{cases} g(0)=-x^2+x \leq 0, \\ g(1)=2+1+x-x^2+x \leq 0, \end{cases}$ 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 故选 A.

11. $\frac{1}{4}$ 命题点 ① 利用重要不等式求最值

【解析】 $a^2+4b^2 \geq 2 \cdot a \cdot (2b)=4ab$, 即 $1 \geq 4ab, ab \leq \frac{1}{4}$, 当且

仅当 $a=2b$ 时, 等号成立, 故 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

12. $[-2, +\infty)$ 必刷题型 ① 不等式有解求参数范围

【解析】(分类讨论) 令 $f(x)=ax^2-2x-2a (x \in [0, 1])$.

① 当 $a=0$ 时, $f(x)=-2x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-2$, 此时满足条件.

② 当 $a \neq 0$ 时, $y=ax^2-2x-2a$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}$.

若 $a < 0$, 则 $\frac{1}{a} < 0$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 则只需满足

$f(1) \leq 0$, 得 $-2 \leq a < 0$.

若 $a > 0$, 则 $f(0)=-2a < 0$, 满足条件.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[-2, +\infty)$.



一题多解 (参变分离) 当 $x \in [0, 1]$ 时, $x^2 - 2 < 0$, 由 $ax^2 - 2x - 2a \leq 0$ 得 $a(x^2 - 2) \leq 2x$,

则 $a \geq \frac{2x}{x^2 - 2}$ 在 $[0, 1]$ 上有解. 令 $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2}$ ($x \in [0, 1]$),

则当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$;

当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} = \frac{2}{x - \frac{2}{x}}$,

因为 $y = x - \frac{2}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增 (提示: 增函数 + 增函数 = 增函数), 所以 $x - \frac{2}{x} \in (-\infty, -1]$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调

递减, $f(x) = \frac{2}{x - \frac{2}{x}} \in [-2, 0)$. 故实数 a 的取值范围为 $[-2, +\infty)$.

13. $2\sqrt{2}$ 必刷考点 ⊙ 基本不等式的应用

【解析】 $\because 1 = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2 \geq 2 \cdot x \cdot 2y, \therefore x \cdot 2y \leq \frac{1}{2}$,

当且仅当 $x = 2y$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时取等.

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{x \cdot 2y}}$, 当且仅当 $x = 2y$ 时取等,

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{x \cdot 2y}} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时等号

易错点

同时成立, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$.

14. -4 命题点 ⊙ 不等式恒成立问题、二次函数图象与性质的综合应用

【解析】令 $t = 2a + b$, 则 $b = t - 2a$, 所以 $tx^2 + (t - 2a)x - a - 1 \leq 0$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上恒成立, 即 $t(x^2 + x) \leq 2ax + a + 1$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上恒成立, 所以对 $\forall x \in [-2, 2]$, 函数 $y = t(x^2 + x)$ 的图象

关键点

总在直线 $y = 2ax + a + 1$ 的下方或与直线相切.

函数 $y = t(x^2 + x)$ 的图象过点 $(-1, 0)$ 和点 $(0, 0)$, 直线 $y = 2ax + a + 1 = a(2x + 1) + 1$ 过定点 $A\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

讨论 $t < 0$ 时的情况 (提示: 因为二次函数图象在直线的下方或与直线相切, 所以考虑开口向下的情况),

当 $t = -1$ 时, 如图①, 二次函数 $y = t(x^2 + x) = -(x^2 + x)$ 图象的顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 存在 a 对 $\forall x \in [-2, 2]$, 使得 $t(x^2 + x) \leq 2ax + a + 1$ 恒成立.

当 $t \in (-1, 0)$ 时, 随着 t 逐渐增大 (提示: 二次函数图象的顶点逐渐下移), 总存在 a 对 $\forall x \in [-2, 2]$, 使得 $t(x^2 + x) \leq 2ax + a + 1$ 恒成立.

当 $t \in (-\infty, -1)$ 时, 若 t 逐渐减小 (提示: 二次函数图象的顶



点逐渐上移), 如图②, 取临界位置, 即二次函数图象与直线

关键点

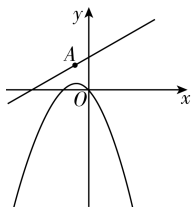
相切时, 二次函数 $y = t(x^2 + x)$ 的图象过点 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, 此时

$t = -4$, 存在 a 对 $\forall x \in [-2, 2]$, 使得 $t(x^2 + x) \leq 2ax + a + 1$ 恒

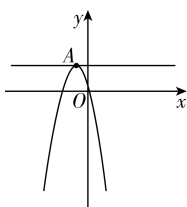
成立; 若 t 继续减小, 如图③, 则定点 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ 在二次函数

图象开口的内部, 则不存在 a 对 $\forall x \in [-2, 2]$, 使得 $t(x^2 + x) \leq 2ax + a + 1$ 恒成立.

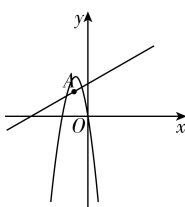
综上, $t_{\min} = (2a + b)_{\min} = -4$.



图①



图②



图③